ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РЕСПУБЛИКИ МОРДОВИЯ «КЕМЛЯНСКИЙ АГРАРНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

РАССМОТРЕНА	СОГЛАСОВАНА
Методической цикловой (предметной) комиссией общеобразовательных дисциплин Председатель:	Заместитель директора по УВР:
_____ Шестакова Т.Е.	_____ Носова Н.Ю.
«03» сентября 2020 г.	*«03» сентября 2020 года*

Комплект методических материалов

«Организация самостоятельной работы по дисциплине «Математика»»

специальности 35.02.16 «Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования» (базовая подготовка)

Разработчик:
Ворожейкина Ольга Викторовна, преподаватель математики высшей категории.

Кемля, 2020

ПРОГРАММА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
учебной дисциплины «Математика»

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Цель и задачи дисциплины:

Дисциплина «Математика» ставит целью ознакомить студентов с математическими методами работы.

Основная цель курса - овладение теоретическими основами науки, приобретение навыков использования математических методов и их применения в экономических и прикладных исследованиях.

Основная задача - обучение студентов структуре теоретического и прикладного математического мышления, практическим методам математики.

Место дисциплины в профессиональной подготовке выпускников:

Изучение дисциплины «Математика» предусмотрено рабочим учебным планом специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)».

Дисциплина «Математика» - необходимый компонент среднего специального образования экономистов, т.к. она расширяет кругозор, позволяет ориентироваться в современных проблемах такой области, как планирование деятельности, анализ и экспертиза проектов. Многие вопросы экономической деятельности решаются посредством математических расчетов, поэтому курс тесно связан с усвоением студентами таких дисциплин, как информатика, экономическая теория, микроэкономика, макроэкономика, статистика, эконометрика, теория принятия решений, стратегическое планирование, страхование, которые позволяют в совокупности подойти к изучению дисциплин специальности.

Требования к уровню самостоятельного освоения курса:

В ходе изучения курса «Математика» студенты должны:

знать:

- классификацию основных методов математики;
- основные теоремы, применяемые в математике;
- условия и ограничения применимости результатов работы.

уметь:

- применять имеющиеся знания для решения практических задач;
- отличать условия применимости тех или иных теорем и методов.

иметь представление:

- о возможностях применения математических методов;
- о возможностях применения математических методов в бухгалтерском учете и экономике;
- о взаимосвязи дисциплины с другими дисциплинами;

- о возможностях использования различных программных продуктов при решении задач по математике.

Объем дисциплины, виды учебной работы и формы контроля в соответствии с учебным планом специальности 35.02.16 «Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования» (базовая подготовка)

Вид учебной работы	***Объем часов***
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	**92**
в том числе:	
практические работы	32
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	**37**
в том числе:	
подготовка докладов, сообщений	5
выполнение индивидуальных заданий	4
изучение теоретического материала	12
внеаудиторное решение задач	16
в том числе:	
Итоговая аттестация в форме дифференцированного зачета	

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ СРС

Раздел 2. Линейная алгебра

Матрицы и определители, их применения

Основные формулы матричного исчисления: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$;

$k\cdot A=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$; $A\cdot B=\begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1\ \vec{b}_1\right) & \left(\vec{a}_1\ \vec{b}_2\right) & \dots & \left(\vec{a}_1\ \vec{b}_s\right) \\ \left(\vec{a}_2\ \vec{b}_1\right) & \left(\vec{a}_2\ \vec{b}_2\right) & \dots & \left(\vec{a}_2\ \vec{b}_s\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\vec{a}_m\ \vec{b}_1\right) & \left(\vec{a}_m\ \vec{b}_2\right) & \dots & \left(\vec{a}_m\ \vec{b}_s\right) \end{pmatrix}$

Определитель матрицы второго порядка: $\begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}=a_1в_2-a_2в_1.$

Определитель матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1в_2c_3+в_1c_2a_3+c_1a_2в_3-c_1в_2a_3-в_1a_2c_3-a_1c_2в_3.$$

Формулы Крамера: $x=\dfrac{D_x}{D}$; $y=\dfrac{D_y}{D}$; $z=\dfrac{D_z}{D}$.

Связь между минорами и алгебраическими дополнениями: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Задача 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+\ y+z=-2, \\ 4x+2y+z=-4, \\ 9x+3y+z=-8. \end{cases}$

<u>Решение:</u> В данном случае $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$ поэтому решение системы существует, и при том единственное. Находим $\Delta_1=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-2,$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \end{vmatrix}=2,$ $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 9 & 3 & -8 \end{vmatrix}=-4.$

Следовательно, $x = -2/2 = -1$, $y = 2/2 = 1$, $z = -4/2 = -2$.

Задача 2. Решить систему уравнений матричным способом: $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x+5y+6z=1, \\ 2x+7y+7z=2. \end{cases}$

<u>Решение:</u> Эту систему можно переписать в матричном виде $AX = B$, где $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Для матрицы A существует обратная $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; поэтому $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$.

Подставив значения матриц X, A^{-1}, B, будем иметь $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ или $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

Основное описание методов Гаусса и Жордана - Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных.

Метод Жордана – Гаусса. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

В матрице А этой системы выберем отличный от нуля элемент a_{qp}. Этот элемент называется *разрешающим элементом, p-* й столбец матрицы *A - разрешающим столбцом,* а *q - я* строка - *разрешающей строкой.*

Рассмотрим новую систему уравнений $\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$ с матрицей A';

коэффициенты и свободные члены этой системы определяются по формулам $\left.\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ip}\, a_{qj}}{a_{qp}} \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{ip}\, b_q}{a_{qp}} \end{aligned}\right\}$, $i \neq q$.

В частности, $a_{ip} = 0$, если $i \neq q$. Если же $i = q$, то принимаем $a'_{qj} = a_{qj}$, $b'_q = b_q$. Таким образом, *q - е* уравнения в этих системах одинаковы, а коэффициенты при x_p во всех уравнениях второй системы, кроме *q - го*, равны нулю.

Следует иметь ввиду, что эти системы совместны или несовместны одновременно. В случае совместности они равносильны (их решения совпадают).

Задача 3. Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы А:

$$\begin{array}{ll} \textit{вид изделия} & \textit{вид сырья} \\ \downarrow & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ & A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

<u>Решение.</u> Составим вектор-план выпуска продукции $\vec{q} = (60 \quad 50 \quad 35 \quad 40)$.

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора $\vec{q}$ на матрицу А:

$$\vec{q} \cdot A = (60 \quad 50 \quad 35 \quad 40) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 + 50 + 245 + 160 \\ 180 + 100 + 70 + 200 \\ 240 + 250 + 105 + 240 \\ 300 + 300 + 70 + 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес., ед.изм			Запас сырья, вес, ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

(Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятий, экспертных оценок проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий).

Решение. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x1, x2 и x3. Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450, \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах): *x = 150, y = 250, z = 100.*

Основные понятия межотраслевого баланса производства и потребления продукции

Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат $\grave{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix}$ и вектор конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}$. Найти коэффициенты полных материальных затрат двумя способами (с помощью формул обращения невырожденных матриц и приближенно), заполнить схему межотраслевого баланса.

1. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат по второму способу, учитывая косвенные затраты до 2-го порядка включительно. Запишем матрицу коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,14 & 0,02 \\ 0,37 & 0,12 & 0,01 \\ 0,17 & 0,05 & 0,01 \end{pmatrix}$$

матрицу коэффициентов второго порядка:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,46 & 0,14 & 0,02 \\ 0,37 & 0,12 & 0,01 \\ 0,17 & 0,05 & 0,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,108 & 0,014 \\ 0,284 & 0,087 & 0,012 \\ 0,129 & 0,04 & 0,005 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица коэффициентов полных материальных затрат приближенно равна:

$$B \approx E + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,46 & 0,14 & 0,02 \\ 0,37 & 0,12 & 0,01 \\ 0,17 & 0,05 & 0,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,35 & 0,108 & 0,014 \\ 0,284 & 0,087 & 0,012 \\ 0,129 & 0,04 & 0,005 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.41 & 0.448 & 0.034 \\ 1.154 & 1.307 & 0.122 \\ 0.499 & 0.19 & 1.015 \end{pmatrix}$$

3. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат с помощью формул обращения невыраженных матриц (первый способ).

А) находим матрицу (Е - А):

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,6&0,2&0,0\\0,5&0,1&0,1\\0,2&0,1&0,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4&-0,2&0\\-0,5&0,9&-0,1\\-0,2&-0,1&1\end{pmatrix}$$

Б) вычисляем определитель этой матрицы:

$$|E-A|=\begin{vmatrix}0,4&-0,2&0\\-0,5&0,9&-0,1\\-0,2&-0,1&1\end{vmatrix}=0.252$$

В) транспонируем матрицу (Е - А):

$$(E-A)'=\begin{pmatrix}0,4&-0,5&-0,2\\-0,2&0,9&-0,1\\0&-0,1&1\end{pmatrix}$$

Г) находим алгебраические дополнения для элемента матрицы $(E-A)'$:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}0.9&-0.1\\-0.1&1\end{vmatrix}=0.89 \qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-0.2&-0.1\\0&1\end{vmatrix}=0.2$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-0,2&0.9\\0&-0.1\end{vmatrix}=0.02 \qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-0.5&-0.2\\-0.1&1\end{vmatrix}=0.52$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}0.4&-0.2\\0&1\end{vmatrix}=0.4 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}0.4&-0.5\\0&-0.1\end{vmatrix}=0.04$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-0.5&-0.2\\0.9&-0.1\end{vmatrix}=0.23 \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}0.4&-0.2\\-0.2&-0.1\end{vmatrix}=0.08$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}0.4&-0.5\\-0.2&0.9\end{vmatrix}=0.26$$

Таким образом, присоединенная к матрице (Е – А) матрица имеет вид:

$$\overline{(E-A)}=\begin{pmatrix}0.89&0.2&0.02\\0.52&0.4&0.04\\0.23&0.08&0.26\end{pmatrix}$$

Д) Находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:

$$\hat{A}=(\hat{A}-\dot{A})^{-1}=\frac{\overline{(\hat{A}-\dot{A})}}{|\hat{A}-\dot{A}|}$$

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.252}\begin{pmatrix}0.89&0.2&0.02\\0.52&0.4&0.04\\0.23&0.08&0.26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.53&0.79&0.08\\2.06&1.59&0.16\\0.91&0.32&1.03\end{pmatrix}$$

Элементы матрицы B, рассчитанные по точным формулам обращения матриц, больше соответствующих элементов матрицы, рассчитанных по второму приближенному способу без учета косвенных материальных затрат порядка выше 2-го.

1. Найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор X), используя формулу $X = BY$

$$X = BY = \begin{pmatrix} 3.53 & 0.79 & 0.08 \\ 2.06 & 1.59 & 0.16 \\ 0.91 & 0.32 & 1.03 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794.6 \\ 590.2 \\ 337.6 \end{pmatrix}$$

2. Для определения элементов первого квадрата материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой, вытекающей из формулы (7.4): $x_{ij} = a_{ij} X_j$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадрата нужно элементы первого столбца заданной матрицы А умножить на величину $X_1 = 794.6$; элементы второго столбца матрицы А умножить на $X_2 = 590.2$; элементы третьего столбца матрицы А умножить на $X_3 = 337.6$.

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы (7.1) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета приведены в таблице:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	476,76	118,04	0	200	794,6
2	397,3	59,02	33,76	100	590,2
3	158,92	59,02	0	120	337,6
Условно чистая продукция	238,38	354,12	303,84	420	
Валовая продукция	794,6	590,2	337,6		1722,4

Раздел 2. Математический анализ

1. Определения предела и непрерывности функции в точке. Свойства пределов

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для всякого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что как только $|x-x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), то $|f(x)-A| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из непрерывности основных элементарных функций и основных теорем о непрерывных функциях следует, что любая элементарная функция непрерывна во всякой точке, в которой она определена (при этом предполагается, конечно, что функция определена и в окрестности этой точки).

1. Предел постоянной равен самой постоянной, т.е. $\lim\limits_{x\to a} C = C$.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют.
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют.
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Под знаком предела можно производить тождественные преобразования аналитического выражения, задающего функцию, не принимая во внимание поведение функции в предельной точке. Особый интерес приобретает случай преобразования аналитического выражения, задающего функцию $f(x)$, в выражение, задающее функцию $\varphi(x)$, непрерывную в самой точке x_0 и совпадающую с $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 без самой этой точки. Тогда очевидно,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \qquad (1)$$

Задача 1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$ при: а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$.

<u>Решение.</u> а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x-2) = -4$, $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-9x+2) = -3 \neq 0$. Так как предел знаменателя отличен от нуля, можно применить теорему о пределе частного (свойство 4). Тогда :

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-9x+2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$ б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$.

Имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Но в окрестности точки $x=2$ имеем $4x^2-9x+2 \neq 0$ (при $x \neq 2$), и поэтому дробь можно сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители, воспользовавшись

формулой $ax^2+bx+c= a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{4x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)}=$$

$$=\frac{3\cdot 2+1}{4\cdot 2-1}=\frac{7}{7}=1.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$.

Имеем неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{4-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x}+\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{3-0-0}{4-0+0}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $а)\frac{4}{3};\quad б)1;\quad в)\frac{3}{4}.$

Задача 2. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+3}-\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ и $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$.

Имеем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, теорему о пределе частного применять нельзя. Преобразуем данное выражение, помножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{x+3-1+x}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{2x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{2(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

2. Первый замечательный предел

Если угол x выражен в радианах, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.

Первый замечательный предел можно применять в ряде случаев для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Задача 3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}12x}{\sin 3x}$.

<u>Решение.</u> Здесь неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Преобразуем данную функцию: $\frac{\mathrm{tg}12x}{\sin 3x}=\frac{\sin 12x}{\cos 12x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}=\frac{12}{3}\cdot\frac{1}{\cos 12x}\cdot\frac{\sin 12x}{12x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}$.

Обозначим $12x=U$, причем $\lim\limits_{x\to 0}U=\lim\limits_{x\to 0}(12x)=12\lim\limits_{x\to 0}x=12\cdot 0=0,$ т.е. при $x \Rightarrow 0$ и $U \Rightarrow 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{12x}=\lim\limits_{U\to 0}\frac{U}{U}=1$.

Аналогично, положив $3x=U$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\lim\limits_{U\to 0}\frac{U}{\sin U}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 12x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$.

Следовательно
$$\lim_{x\to 0}{tg12x}/{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left({12}/{3}\cdot{1}/{\cos 12x}\cdot{\sin 12x}/{12x}\cdot{3x}/{\sin 3x}\right)=$$
$$={12}/{3}\lim_{x\to 0}{1}/{\cos 12x}\cdot\lim_{x\to 0}{\sin 12x}/{12x}\cdot\lim_{x\to 0}{3x}/{\sin 3x}={12}/{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=4.$$

<u>Ответ:</u> 4.

Задача 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}6x}{3x}$. Имеем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

<u>Решение.</u> Обозначим $\mathrm{arctg}\ 6x=U$, тогда $6x=\mathrm{tg}U$ и при $x \Rightarrow 0$ имеем $U \Rightarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}6x}{3x}=\lim_{U\to 0}\frac{U}{{1}/{6}\cdot 3\cdot tgU}=\lim_{U\to 0}\left(2\cdot\frac{U}{tgU}\right)=2\lim_{U\to 0}{U}/{tgU}=$$

$$=2\lim_{U\to 0}\left(\frac{U}{\sin U}\cdot\cos U\right)=2\cdot\lim_{U\to 0}{U}/{\sin U}\cdot\lim_{U\to 0}\cos U=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

<u>Ответ:</u> 2.

3. Второй замечательный предел

Он имеет вид: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+{1}/{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$, где e – иррациональное число, приблизительно равное 2,71828…

Логарифмы с основанием e называются натуральными и обозначаются $\log_e x=\ln 1$.

С помощью этого предела раскрывают так же неопределенность вида $\{1^\infty\}$.

Задача 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n-2}\right)^{3n-1}$. Здесь неопределенность вида $\{1^\infty\}$.

<u>Решение.</u> Преобразуем выражение в скобках.

$\frac{4n+3}{4n-2}=\frac{4n-2+5}{4n-2}=\frac{4n-2}{4n-2}+\frac{5}{4n-2}=1+\frac{5}{4n-2}$. Обозначим $\frac{5}{4n-2}=\alpha$, тогда $4n-2=\frac{5}{\alpha}$, $4n=\frac{5}{\alpha}+2$,

$n=\frac{5}{4\alpha}+\frac{1}{2},\ 3n-1=\frac{15}{4\alpha}+\frac{1}{2}$, причем при $n \Rightarrow \infty$, имеем $\alpha \Rightarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n-2}\right)^{3n-1} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{15/4\alpha+1/2} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{15}{4\alpha}}\cdot(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{15/4}\cdot\sqrt{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)} = e^{15/4}\cdot 1 = e^{15/4} = \sqrt[4]{e^{15}}.$$

Ответ: $\sqrt[4]{e^{15}}$.

Общая схема исследования функций с помощью производной

1. Нахождение области определения функции.
2. Проверка того, является ли функция четной, нечетной, периодической или эта функция – функция общего вида.
3. Определение точек пересечения с осями координат.
4. Нахождение критических точек

(точек, в которых производная равна нулю или не существует).

5. Определение промежутков знакопостоянства функции.
6. Определение промежутков возрастания и убывания функции

(промежутков, на которых производная положительна или отрицательна).

7. Определение экстремумов функции.
8. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, определение точек перегиба (исследование проводится по второй производной функции).
9. Нахождение асимптот функции.
10. Уточнение графика функции по точкам (произвести окончательное уточнение графика, в особенности на участках, где информация о нем недостаточна).

Данную схему можно варьировать в зависимости от конкретных особенностей функции, переставлять отдельные этапы, некоторые из них опускать, какие-то, наоборот, добавлять.

Производная и ее приложения

Упражнения для введения экономических понятий в курс математики разработаны так, чтобы студенты на конкретных задачах с практическим содержанием раскрыли бы («открыли») влияние экономических факторов на повышение прибыли производства.

Задача 1. Расходы на топливо, необходимое для движения океанского танкера, пропорционально кубу его скорости и составляют 20 руб. в час при скорости 10 узлов (узел равен морской миле в час), а все прочие расходы составляют 100 руб. в час. Найти наиболее экономичную скорость движения при тихой погоде. Вычислить дополнительную прибыль, если расстояние до порта назначения 1000 морских миль (морская миля равна 1852 м).

Решение.

Этап формализации.

Этот этап предлагается студентам выполнить самостоятельно.

Запись на доске: *пусть x узлов — наиболее экономичная скорость движения океанского танкера.*

Как найти расход топлива при скорости в 1 узел? (*20 руб./10^3 = 0,02 руб., а потому 0,02л;^{3}, руб. — расход топлива при скорости x узлов*).

Как найти время движения, за которое танкер пройдет 1000 морских миль? (*1000/x, ч*).

Как составить функцию расхода средств за один рейс?

($P = \dfrac{1000 \cdot 0{,}02x^3}{x}$ *руб*).

А как учесть и другие виды расходов, которые составляют 100 руб. в час?

($P = \dfrac{1000\,(0{,}02x^3 + 100)}{x}$ *руб.*)

<u>*Этап решения математической модели.*</u>

1. $P' = \left[1000 \cdot (0{,}02x^3 + \dfrac{100}{x})\right]' = 1000(0{,}04x - \dfrac{100}{x^2})$.

2. $1000(0{,}04x - \dfrac{100}{x^2}) = 0{,}04x^3 = 100,\ \ x = \sqrt[3]{2500}$, *откуда x = 13,6 узлов.*

*При x = 10 P' = 1000(0б04*10 – 100/10^2)<0, при x = 15 P' = 1000(0б04*15 – 100/15^2)> 0, следовательно, 13,6 узлов является наиболее экономичной скоростью.*

<u>*Этап интерпретации*</u>.

Вычислите расходы средств на 1000 морских миль при скорости 10 и 13,6 узлов. ($P = \left[\dfrac{1000 \cdot (0{,}02 \cdot 10^3 + 100}{10}\right] = 12000$ *руб.*; $P_1 = \left[\dfrac{1000 \cdot (0{,}02 \cdot 13{,}6^3 + 100}{10}\right] \approx 11030$ *руб.*)

Найдите дополнительную прибыль, полученную в результате вычисления наивыгоднейшей экономичной скорости: (*$P_{д.п.}$ — дополнительная прибыль за один рейс в 1000 морских миль; $P_{д.п.}$ = P — P_1 ≈12 000 руб. — 11 030 руб. = 970 руб.)*

За счет чего получили дополнительную прибыль? (*За счет научной организации труда. О НОТ сейчас много пишут в газетах, пропагандируя передовые методы организации труда на предприятиях*).

<u>Ответ.</u> Дополнительная прибыль за один рейс в 1000 морских миль составляет примерно 970 руб.

Задача 2. Из сопротивления материалов известно, что прочность балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорциональна произведению ширины на квадрат высоты.

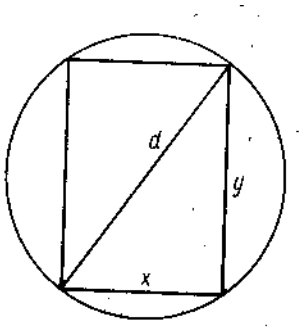

Рис. 3

Вычислите размеры наиболее прочной балки, т. е. соотношение ширины к высоте поперечного сечения, которую нужно изготовить из цилиндрического бревна, если диаметр равен d линейных единиц. Выясните с экономической точки зрения, почему необходимо при строительстве сооружений учитывать полученный результат решения задачи.

Решение.

Пусть x линейных единиц — ширина поперечного сечения балки, а y линейных единиц — высота поперечного сечения (рис. 3), тогда по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = d^2$.

Прочность балки

$S = kxy^2 = kx\,(d^2 - x^2) = kd^2x - kx^3$, где k — коэффициент пропорциональности. Функция прочности балки составлена, далее следует исследовать ее на максимум и минимум:

$S' = (kd^2x - kx^3)' = k\,(d^2 - 3x^2)$;

$k(d^2 - 3x^2) = 0$, откуда $x_1 = d/\sqrt{3}$.

Прочность балки не может быть неограниченно большой, т. е. она должна иметь определенный максимум. Следовательно, корень $x_1 = d/\sqrt{3}$ дает нам значение, при котором функция S достигает максимума. При $x_1 = d/\sqrt{3}$ линейных единиц высота $y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ линейных единиц. Таковы размеры наиболее прочной балки, т. е. отношение ширины к высоте как 5 : 7.

Задача 3 (дополнение к задаче 2). Пусть нужно уложить 2100 балок для получения проектногб запаса прочности при неправильной укладке балок. Вычислить, какая будет экономия средств при правильной укладке балок, если стоимость одной балки 2 850 руб.

Примечание. Использовать результат решения задачи 2.

Решение.

Расход средств при неправильной укладке балок: P = 2850 руб. • 2100 = 5985000 руб.

Прочность на изгиб:

$S_1 = yx \cdot 2100 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2100.$

Прочность на изгиб при правильной укладке балок:

$S_2 = xy^2 N = 5 \cdot 7^2 \cdot N.$

Так как прочность сооружения должна быть одна и та же, то

$S_1 = S_2$, *т. е.* $7 \cdot 5^2 \cdot 2100 = 5 \cdot 7^2 \cdot N$, *откуда* $N = 1500$ *шт., следовательно, экономия средств равна*

5985000 руб — 2 850 руб ·1500 = 1710000 руб.

Какие технико-экономические факторы могут быть решены, если учитывать результат решения задачи 2? (*Всякий раз при строительстве различных сооружений необходимо стремиться к повышению качества сооружений (прочность, долговечность), а с экономической*

точки зрения это будет способствовать экономии капиталовложений и строительного материала. При строительстве объектов нужно учитывать законы физики, и применять математический аппарат для определения оптимально выгодных условий строительства).

Задача 4. Из отходов основного производства, представляющих квадратные куски листового железа со стороной, равной а, цех ширпотреба изготовляет коробки без крышки, вырезая по углам такие квадратики, чтобы, загибая получившиеся выступы, изготовить коробку наибольшего объема. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратиков? Какие практические выводы можно сделать из условия и результата решения задачи?

Решение.

Пусть а линейных единиц — сторона вырезаемых квадратиков, высота коробки х линейных единиц, длина дна коробки а—2х, тогда объем

$V= (a—2x)^2 x=a^2 x — 4 ax^2+4 x^3$.

Нужно найти значение х, при котором функция V достигнет максимума. Для этого функцию V исследуем на максимум и минимум:

$V' = a^2 — 8 ax+ 12 x^2$; $a^2 — 8 ax+ 12 x^2 = 0$, *откуда* $x_1 = a/2$, $x_2 = a/6$.

Без исследования заключаем, что максимум будет при х=а/6. Если вырезать квадратики со стороной, равной а/2, то от куска жести ничего не останется и объем коробки будет равен нулю.

Итак, сторона вырезанных квадратиков должна составлять шестую часть стороны данного квадратного х куска листового железа. При х=а/6 максимальный объем коробки $V= = 2a^3/27$ *куб. ед.*

Какие практические выводы можно сделать из условия и результата решения задачи? (*Главное, о чем сказано в условии задачи, это использование в хозяйстве отходов основного вида производства. Не в утиль сдаются отходы, а используются для изготовления тары, т. е. данное предприятие экономит материал. В нашей стране ежегодно изготовляются сотни миллионов всевозможной тары и потому необходимо изготовлять тару такой формы, чтобы при данных затратах материала она была бы наибольшего объема, чтобы дополнительно сэкономить материал*).

Какие еще экономические вопросы здесь затрагиваются? (*Здесь еще решается одна важная проблема — это проблема экономии рабочего времени, т. е. экономии труда, так как изготовление тары максимального объема снизит количество выпускаемой тары*).

Из анализа условия и результата решения простой задачи мы пришли к выводу, что *утилизация, т. е. разумное использование отходов производства, может являться источником дополнительной прибыли. Таким образом, режим экономии сырья, рациональное*

использование рабочей силы являются важным фактором повышений рентабельности предприятия.

Приложения определенных интегралов

Разберем приложения определенных интегралов к решению математических задач с экономическим содержанием.

1. Производительность труда в течение рабочего дня изменяется. Положим, что x — время, отсчитываемое от начала рабочего дня, тогда производительность труда y является функцией времени, т. е. $y = f(x)$.

Допустим, что нужно определить объем продукции, произведенной рабочим от a часов до b часов. Объем продукции, выпускаемой рабочим за время $(b—a)$ часов, можно рассматривать как сумму объемов продукции, произведенных в бесконечно малых интервалах, на которые поделен интервал $b—a$. Можно считать, что в каждом из этих бесконечно малых интервалов Δx функция $f(x)$ не изменяется и, следовательно, объем произведенной продукции есть произведение производительности труда $f(x)$ на время Δx. Следовательно, продукция, произведенная за b часов, равна:

$$\sum_{\substack{a \\ \Delta x \to 0}}^{b} f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \quad (1)$$

2. Количество товара, поступающего на склад в единицу времени, можно рассматривать как функцию времени x, отсчитываемого от начала поступления товаров на склад, т. е. $y=f(x)$.

Рассуждая аналогично, как в п. 1, получим

$$y = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

3. Если $f(x)$ —нагрузка на электростанцию, квт·ч, где x число часов, отсчитываемое от начала суток, то расход электроэнергии в течение времени от a до b будет

$$y = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Эта формула получается так же, как и в п. 1.

4. Допустим, что завод сельскохозяйственных машин изготовляет определенный тип тракторов, причем годовой выпуск продукции есть постоянная величина N, а x — число лет, в течение которых этот тип тракторов производится. В момент t число имеющихся тракторов этого типа (если предположить, что они не выходят из эксплуатации, т. е. морально не устарели) составляет:

$$y = \int_0^t N\,dx = [Nx]_0^t = Nt. \qquad (4)$$

Если объем продукции растет, допустим, по закону арифметической прогрессии $f(x) = U_0 + U_1 X$, то количество производимых тракторов данного типа составит:

$$y = \int (U_0 + U_1 x)\,dx = \left[U_0 x + \frac{U_1 x^2}{2}\right]_0^t = U_0 t + \frac{U_1 t^2}{2}. \ (4')$$

Примечание. Из выполненных нами решений в общем виде следует, что в первом случае количество тракторов возрастает пропорционально времени, а во втором — по параболе.

5. Предположим, что годовой доход $D=f(t)$ есть функция времени. Удельная норма процентов есть i, которые начисляются непрерывно. Определить объем дохода, полученного за t лет.

Очевидно, чтобы вычислить эту величину, нужно отрезок времени t разделить на n равных отрезков времени Δt. В весьма, малом отрезке времени Δt доход можно считать неизменным и потому равным $f(t)\,\Delta t$.

При непрерывном начислении процентов доход составит:

$$\frac{t(t)\,\Delta t}{e^{it}} = f(t)\,\Delta t\, e^{-it},$$

в отрезке времени $[0;\ t]$ доход составит:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t f(t)\, e^{-it}\, \Delta t = \int_0^t f(t)\, e^{-it}\, dt \qquad (5)$$

Допустим, что годовой доход постоянен: $f(t)=N$, то его величина равна:

$$D = \int_0^t N e^{-it}\, dt = N \int_0^t e^{-it}\, dt = N\left[-\frac{1}{t} e^{-it}\right]_0^t = N\left(-\frac{1}{t} e^{-it} + \frac{1}{t} e^0\right) = \frac{N}{i}(1 - e^{-it}).$$

Из рассмотренных случаев ясно, что определенный интеграл имеет широкое применение в решении различных типов задач с экономическим содержанием.

Задача 1. Дневная производительность труда рабочего машиностроительного завода приблизительно выражается функцией $y = 0{,}004\,t^2 + 0{,}09t + 20{,}094$, где t — выпуск продукции за один час. Определить объем продукции в течение года, если число рабочих дней равно 240, а продолжительность рабочего дня 7 ч. Выпуск продукции в один день вычислить с точностью до единицы.

Решение.

Объем продукции, изготовляемой рабочим за один день (смену), определим с помощью определенного интеграла:

$$v = \int_0^7 (-0{,}0004t^2 - 0{,}09t + 20{,}094)\,dt = \left[\frac{0{,}004t^3}{3} - \frac{0{,}09t^2}{2} + 20{,}094t\right]_0^7 = \frac{0{,}004 \cdot 7^3}{3} +$$

$$+ \frac{0{,}09 \cdot 7^2}{2} + 20{,}09 \cdot 7 = \frac{0{,}004 \cdot 343}{3} + \frac{0{,}09 \cdot 49}{2} + 140{,}63 = 143 \quad шт.$$

Объем продукции за год составит 34 320 шт.

Ответ. 34 320 шт.

Раздел 3. Пропорции и проценты

Простые проценты

Простые проценты - это метод расчета дохода кредитора от предоставления денег в долг заемщику.

Сущность простых процентов состоит в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала ***K*** в течение всего срока ссуды. Простые проценты дают больший доход при их начислении на срок меньше года.

Основная формула простых процентов: $\frac{K}{I} = \frac{100}{pn}$ или $I = \frac{K\,p\,n}{100}$, где ***K*** - начальный капитал, ***I*** - доход (процентный платеж, процентные деньги или просто проценты), получаемый кредитором от заемщика за пользование денежной ссудой; ***p*** - процентная ставка, показывающая сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование 100 ед. капитала за год, т. е. годовая ставка в процентах, ***n*** - время в годах. Если ставка измеряется в долях единицы, то она обозначается буквой $i = \frac{p}{100}$.

Надо помнить, что во всех расчетных формулах ставка берется в долях единицы. Например:

1%=0,01;

40%=0,4;

300%=3 и т.д.

Если деньги отданы взаймы под проценты, то заемщик возвращает наращенную сумму

S = K + I = K + Kni = K(1 + ni), где $i = \frac{p}{100}$ - процентная ставка в долях единицы, ***n*** - время в долях года.

Доход за ***n*** лет ***I = Kni***, ***(1 + ni)*** - множитель наращения по простым процентам.

Итак, если по начальному капиталу (сегодняшним деньгам) ***K*** находится будущая сумма денег ***S***, то операция называется *наращением*.

Если же, зная будущие деньги ***S***, находят их сегодняшнюю сумму ***K*** по формуле: $K = \frac{S}{1+ni}$,

то операция называется *математическим дисконтированием*, $\frac{1}{1+ni}$ - дисконтный множитель.

Задача1. Капитал 200 тыс.руб. вложен в банк на 8 месяцев под 12% годовых. Найти сумму, которая будет получена к концу срока.

Решение:

K = 200 тыс.руб., ***n*** = $\frac{8}{12}$ года, ***i*** = 0,12, ***p*** = 12% . ***S*** = ?

I способ. $S = K + I$, $I = \frac{K\,p\,m}{1200}$, $I = \frac{200 \cdot 12 \cdot 8}{1200}$ = 16000 руб, S = 200 + 16 = 216000 руб.

II способ. Ставка годовая, срок ***n*** в месяцах переведем в доли года: ***n*** = 8 месяцев = $\frac{8}{12}$ года.

S = K(1 + n·i)=200· (1 + $\frac{8}{12}$ ·0,12) = 216000 руб.

Задача 2. Капитал 200 тыс.руб. вложен в банк на 80 дней под 12% годовых. Найти величину вклада через 80 дней. Расчет сделать точным и банковским методом.

Решение:

K = 200 тысяч руб, ***n*** = $\frac{80}{360}$ года или ***n*** = $\frac{80}{365}$ года, ***i*** = 0,12, ***S*** = ?

1.Точный метод: Т.к. ставка годовая, срок ***n*** переведем в доли года: ***n*** = $\frac{80}{365}$ года,

S = K· (1 + n·i) = 200· (1 + $\frac{80}{365}$ · 0,12) =205,26 тыс.руб.

Банковский метод: Срок ***n*** = $\frac{80}{360}$ года, ***S = K(1+ n·i)*** = 200· (1+ $\frac{80}{360}$ · 0,12) =205,33 тыс.руб.

Банковский метод дает большее наращение. Ставка ***i*** и время ***n*** в этих формулах соразмеримы.

Это, значит, что если ставка годовая, время измеряется в годах; если ставка полугодовая - время в полугодиях и т.д.

Задача 3. Начальный капитал 30 млн. руб. Найти наращенную сумму через 5 месяцев по

а) ежегодной ставке 30 %;

б) ежемесячной ставке 3 %;

в) квартальной ставке 5 %.

Решение: ***S = K· (1 + n·i)***, ***K*** = 30 млн., ***n*** = 5 месяцев.

а) Т. к. 30 % - годовая ставка, время переводим в доли года ***n*** = 5 месяцев =$\frac{5}{12}$ года.

S = 30· (1 + $\frac{5}{12}$ · 0,3) = 33,75 млн. руб.

б) I способ. Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежемесячную ставку и время в месяцах: 3 % - ежемесячная ставка, ***n*** = 5 месяцев, ***S*** = 30· (1 + 5· 0,3) = 34,5 млн. руб.

II способ. Рассчитаем наращенную стоимость, переведя ежемесячную ставку в годовую, и время в месяцах переведем в доли года: 3 % ·12 месяцев = 36 % - годовая ставка, n = 5 месяцев = $\frac{5}{12}$ года, $S = 30\cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}36) = 34{,}5$ млн. руб.

в) I способ. Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежеквартальную ставку, и время в месяцах переведем в кварталы, помня о том, что 1 квартал равен 3 месяцам:

3 % - ежеквартальная ставка, ***n*** = 5 месяцев = $\frac{5}{3}$ квартала, ***S*** = $30(1 + \frac{5}{3}\ 0{,}05) = 32{,}5$ млн. руб.

II способ. Рассчитаем наращенную стоимость, переведя ежеквартальную ставку в годовую, и время в месяцах - в доли года:

5 % ·4 квартала = 20% - годовая ставка, ***n*** = 5 месяцев = $\frac{5}{12}$ года, ***S*** = $30\cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}2) = 32{,}5$ млн. руб.

III способ. Рассчитаем наращенную стоимость, используя ежемесячную ставку и время в месяцах: 5 % : 3 = $\frac{5}{3}$ % - ежемесячная ставка, ***n*** = 5 месяцев, ***S*** = $30\cdot (1 + 5\cdot \frac{5}{300}) = 32{,}5$ млн. руб.

Обратите внимание!: Ставка годовая, срок измеряется в годах; Ставка ежемесячная, срок - в месяцах и т. д.

Раздел 4. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики

Основные формулы теория вероятностей

Операции над событиями

Суммой двух событий А и В называется событие $A\cup B$ (A+B), заключающееся в том, что произойдет хотя бы одно из событий А или В (либо событие А, либо событие В либо А и В одновременно).

*Произведением (*или пересечением) двух событий А и В называется событие $A\cap B$ (AB), состоящее в одновременном появлении и события А и события В.

Вероятность суммы двух событий вычисляется по формуле *(теорема сложения)*

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

События $A_1, A_2, ..., A_к$ образуют **полную группу событий**, если в результате испытания непременно произойдет одно из них , т.е. $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

События А и В называются **несовместными** (непересекающимися), если они не могут произойти одновременно $A\cap B=\varnothing$. Если события несовместны, то

P(AB) = 0 и P(A + B) = P(A) + P(B).

Задача 1. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными*?*

Решение. Событие А={вынуты пуговицы одного цвета} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают выборку пуговиц красного и синего цвета соответственно. Вероятность вытащить две красные пуговицы равна $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$, а вероятность вытащить две синие пуговицы $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2}$. Так как события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то в силу теоремы сложения

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}} = 0{,}438.$$

Условная вероятность и теорема умножения.

Помимо обычной (безусловной) вероятности можно рассматривать так называемую *условную вероятность*, вычисляемую при условии, что событие В произошло. Такую вероятность (вероятность А при условии В) обозначают Р(А|В) и вычисляют с помощью одной из двух формул:

$$P(A \mid B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из этой формулы вытекает формула для вероятности произведения двух событий *(теорема умножения)* $P(AB) = P(B)P(A \mid B)$ *èëè* $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$.

Формула умножения для трех событий: $P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$.

Задача 2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

Решение. Пусть А={старший ребенок – мальчик}, В={в семье есть дети обоего пола}. Будем считать, что рождения мальчика и рождение девочки – равновероятные события. Если рождение мальчика обозначить буквой М, а рождение девочки – Д, то пространство всех элементарных исходов состоит из четырех пар: $\Omega = \{ÌÌ \quad , ÌÄ \quad , ÄÌ \quad , ÄÄ\}$. В этом пространстве лишь два исхода (МД и ДМ) отвечают событию В. Событие АВ означает, что в семье есть дети обоего пола и старший ребенок – мальчик, это значит, что второй (младший) ребенок – девочка. Этому событию АВ отвечает один исход – МД. Таким образом, |АВ|=1, |В|=2 и $P(A \mid B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Задача 3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, берет и проверяет детали одну за другой, пока нему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали.

Решение. Событие А={мастер проверил ровно две детали} означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая – стандартная. Значит, $A = A_1 A_2$, где A_1={ первая деталь оказалась нестандартной } и A_2={вторая деталь – стандартная}. Очевидно, что вероятность $P(A_1) = 3/10,$ кроме того, $P(A_2 \mid A_1) = 7/9$ (так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных). По теореме умножения

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0{,}23.$$

Независимость событий

Событие А *не зависит от* В, если появление события В не меняет значения вероятности события А, т.е. условная вероятность равна безусловной: **P(A/B) = P(A).** Аналогично определяется независимость события В от А. Оказывается, что свойство независимости на самом деле симметрично относительно событий А и В, и потому определение независимости двух событий принимает более простой вид:

два события А и В *независимы,* если справедливо равенство **P(AB) = P(A) · P(B).**

Это равенство можно использовать также как удобный критерий независимости при практической проверке независимости двух событий.

Задача 4. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут один белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

Решение. Событие А={хотя бы из одного ящика вынут белый шар} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают выборку одного белого шара из первого и второго ящика соответственно. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна $P(A_1) = 3/8$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 6/10$. Кроме того, в силу независимости A_1 и A_2 имеем: $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}225$. По теореме сложения получаем: $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 3/8 + 6/10 - 0{,}225 = 0{,}75$.

Формула полной вероятности

Пусть событие А может быть реализовано только при условии появления одного из событий H_i, i = 1,..., n. Предположим, что события H_i несовместны, образуют полную группу (т.е. в результате испытания непременно произойдет одно из них) и вероятности их до опыта известны..

Такие события H_i называются *гипотезами.* Тогда вероятность события А можно вычислить с помощью *формулы полной вероятности:*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i).$$

Задача 5. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студента, а третий — 21 студентов (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, зато у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Решение. Обозначим через H_1, H_2, H_3 – гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$$P(H_1)=6/30=0{,}2,\qquad P(H_2)=3/30=0{,}1,\quad P(H_3)=21/30=0{,}7.$$

Пусть событие А={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}. Тогда снова в силу условия задачи

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}4,\quad P(A\,|\,H_2)=0{,}1,\qquad P(A\,|\,H_3)=0{,}7.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}58.$$

Для решения задач такое типа удобно использовать так называемое "дерево" вероятностей. Из формулы полной вероятности следует, что для вычисления вероятности события А необходимо осуществить перебор всех путей, ведущих к результирующему событию А; вычислить и расставить на соответствующих путях вероятности $P(H_i)$ того, что движение будет происходить по данному пути, и вероятности $P(A/\ H_i)$ того, что на данном пути будет достигнуто конечное событие А. Затем <u>вероятности, стоящие на одном пути, перемножаются, а результаты, полученные для различных путей, складываются.</u>

Каждое из условий может в свою очередь делиться на несколько дополнительных условий или гипотез, т.е. на каждом этапе оно допускает неограниченное число ветвлений схемы, поэтому в решении задач удобнее пользоваться не самой формулой полной вероятности, а графической схемой полной вероятности, которую называют "деревом" вероятностей.

Формулы Байеса

Предположим теперь другую ситуацию: пусть теперь известно, что событие А произошло. Это знание влияет на нашу оценку вероятностей гипотез H_k, т.е. на вероятность того, что событие А произошло именно путем H_k. Эти условные вероятности (т.е. при условии, что событие А произошло), вычисляются с помощью *формулы Байеса:*

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}.$$

Отметим, что в знаменателе этой формулы записана ничто иное как вероятность P(A), вычисленная по формуле полной вероятности.

Задача 6. *(см. задачу 4)* Известно, что студент сдавал экзамен, но получил «неуд». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

Решение. Вероятность получить «неуд» равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$. Требуется вычислить условные вероятности $P(H_i \mid \overline{A}), i = 1,2,3$. По формулам Байеса получаем:

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}285,$$

и аналогично,

$$P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}42} = 0{,}214, \qquad P(H_3 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}42} = 0{,}5$$

Отсюда следует, что вероятнее всего слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ:

1. Найдите матрицу $A^2 - 6A$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Произведите умножение матриц в указанном порядке:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3. Найдите A^{-1}, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

4. Докажите равенство $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$ как непосредственным подсчётом определителя, так и используя свойства определителя

5. С помощью правил Крамера, матричным, Гаусса, Жордана-Гаусса способами решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=7, \\ 2x-y+z=9, \\ x-4y+2z=11. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x-3y+z=1, \\ 4x+y-5z=1. \end{cases}$

6. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Вид сырья	*Расход сырья по видам продукции*			*Запас сырья, вес*
	1	*2*	*3*	
1	6	4	6	1200
2	4	2	1	1350
3	4	3	4	1500

7. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x^2+3x+1}$

8. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-5x+1}{x^2-6x+5}$.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3x-2}-2}$.

10. Найти $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2x-3}$.

11. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

12. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x - x^3$

13. Прямоугольный участок земли в 90 000 м^2 нужно окопать вдоль всей границы рвом. Как выбрать размеры сторон участка, что бы на выкапывание рва израсходовать минимальное количество средств? (Ответ. 300Х300 м^2.)

14. Для производственных целей требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимостью 1500 м^3 воды. Вычислить наиболее экономичное соотношение высоты и радиуса резервуара, если стоимость материала, из которого изготовляется дно резервуара, в два раза больше стоимости материала, идущего на боковые стенки. При каких размерах резервуара постройка его будет наиболее дешевой? (Ответ. R = 10, h =5 м).

15. Расход угля в час моторным ботом составляет $3 + 0{,}01\, v^3$ ц, где v — скорость бота в час. Найти наиболее экономичную скорость бота. (Ответ, $v = \sqrt[3]{150}\ м/с.$)

16. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого равен 576 дм^3, а стороны основания относятся как 1 : 2. Каковы должны быть размеры сторон ящика, чтобы израсходовать наименьшее количество материала? (Ответ. 6 х 12 х 8 дм^3).

17. Предприятие производит x усл. ед. продукции в месяц. Чистая прибыль в сотнях рублей от объема выпускаемой продукции описывается функцией $A = 0{,}01x^3 + 300x + 500$, где $1 \le x \le 5$. Вычислить прибыль предприятия при $x=5$. Вычислить с точностью до одного рубля. (Ответ. 287 656 руб.).

18. Ткацкая фабрика выпускает шерстяные ткани x сотен метров в день. Прибыль фабрики в сотнях рублях описывается функцией $A = 0{,}04x^3 + 0{,}03x^2 + 18x$, где $1 \le x \le 10$. Вычислить прибыль фабрики при $x = 10$. (Ответ. 100 000 руб.).

19. Определите, какая сумма окажется на счете, если вклад размером 900 тыс. руб. положен под 9% годовых на 19 лет, а проценты начисляются ежеквартально.

20. Какая сумма должна быть выплачена, если шесть лет назад была выдана ссуда 1500 тыс. руб. под 15% годовых с ежемесячным начислением процентов.

21. Предполагается, что в течение первых двух лет на счет откладывается по 800 тыс. руб. в конце каждого года, а в следующие три года — по 850 тыс. руб. в конце каждого года. Определите будущую стоимость этих вложений к концу пятого года, если ставка процента 11%.

22. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии P_1=0,4, а того, что он произведен в Турции P_2=0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран? (Ответ: P=0,7).

23. В денежно-вещевой лотерее на серию в 10 000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найти вероятности: получить денежный выигрыш P_1, вещевой выигрыш P_2, выигрыш вообще P_3, ничего не выиграть P_4. (Ответ: P_1=0,012, P_2=0,008, P_3=0,02, P_4=0,98.)

24. Вероятность своевременного получения груза P_1= 0,8, а вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена P_1=0,7. Какова вероятность того, что груз будет получен своевременно в неповрежденной упаковке? (Ответ: P_1= 0,56)

25. Ваш автомобиль снабжен двумя противоугонными приспособлениями: механическим и электрическим. Механическое имеет вероятность срабатывания 0,9 (это означает что из 10 раз срабатывает 10 раз), а у электрического вероятность срабатывания 0,8. Какова вероятность того, что ваш автомобиль не угонят? (Ответ: P=0,98).

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Литература

основная

1. С.Д.Захаров Математический практикум. Тюмень, ТГИМЭУП, 2002.
2. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II. М. Высш.шк., 1997.
3. И.П.Мацкевич, Г.П.Свирид, Г.М.Булдык. Сборник задач по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика. Мн. Выш. шк., 1996

4. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 1997.
5. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998.
6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ, 1997.
7. Кремер Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
8. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис Пресс. Рольф. 2007.
9. Справочник по математике для экономистов /В.Е. Барбаумов, В.И. Ермаков, Н.Н. Кривенцов и др; Под редакцией В.И. Ермакова. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Высш.шк., 1997.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: 1997.
11. Шипачев В.С. Курс высшей математики. – М.: Проспект, 2002.

дополнительная

12. Справочник по математике для экономистов. М.Выс. шк., 1997.
13. Энциклопедия математическая. М.:Советская энциклопедия. В 5 т.
14. Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров. Статистический анализ данных на компьютере. М.,ИНФРА-М., 1998.
15. В.И.Малыхин. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2000.
16. В.Л.Кудрявцев, Б.П.Демидович. Краткий курс высшей математики.М., Наука, 1975.

Перечень наглядных и других пособий, методических указаний по проведению учебных занятий

Занятия по дисциплине «Математика» проводятся в соответствии с тематическим планом рабочей программы. Также на занятиях используются задачи настоящего Комплекта.

Перечень специализированных аудиторий для проведения занятий

Аудиторные занятия по дисциплине «Математика» не требуют специализированных аудиторий для проведения занятий. Лекционные занятия могут проводиться с использованием мультимедиа - проектора. Практические занятия проводятся в обычных классах, можно требовать от студентов наличие калькуляторов, в том числе и статистических. При желании преподавателя и возможности можно 1-2 практических занятия провести в компьютерных классах, с соответствующим программным обеспечением Excel, SPSS, Statistica.

Формы текущего, промежуточного, рубежного и итогового контроля

Тематика докладов

1. Математика вокруг нас.
2. История появления процентов.
3. Удивительный мир функций.
4. Роль Исаака Ньютона и Карла Лейбница в создании дифференциального исчисления.
5. Истоки математической статистики.
6. Комплексные числа и их применение в экономической науке.

Вопросы к дифференцированному зачету

1. Исследуйте множество решений системы трех линейных уравнений с тремя переменными в зависимости от Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z.

2. Связь решения системы уравнений с пропорциональностью корней.

3. Какая функция называется непрерывной в точке (два определения)?

4.Что называется точкой разрыва функции?

5. Теоремы о пределах.

6. Какой вид неопределенности используется в определении производной?

7. Из каких операций состоит общее правило отыскания производной?

8. Почему нельзя говорить, что касательная к кривой – это прямая, имеющая общую точку с кривой?

9. Какие данные нужно иметь, чтобы составить уравнение касательной к графику функции в данной точке?

10. Чем является неопределенный интеграл: числом, функцией или совокупностью функций?

11. Что означает фраза «функция $y = f(x)$ имеет первообразную на промежутке X?

12. Чем является определенный интеграл: числом, функцией или совокупностью функций?

13. Как связаны понятия первообразной и определенного интеграла?

14. Составьте перечень практических советов для решения задач на проценты.

15. Какой тип наращения предпочтителен при хранении денег в банке?

16. Какая схема начисления и почему более выгодна при начислении процентов за дробное число лет?

17. Использование теоремы сложения вероятностей и понятия условной вероятности событий.

18. Использование теоремы умножения вероятностей, формул полной вероятности и Байеса.